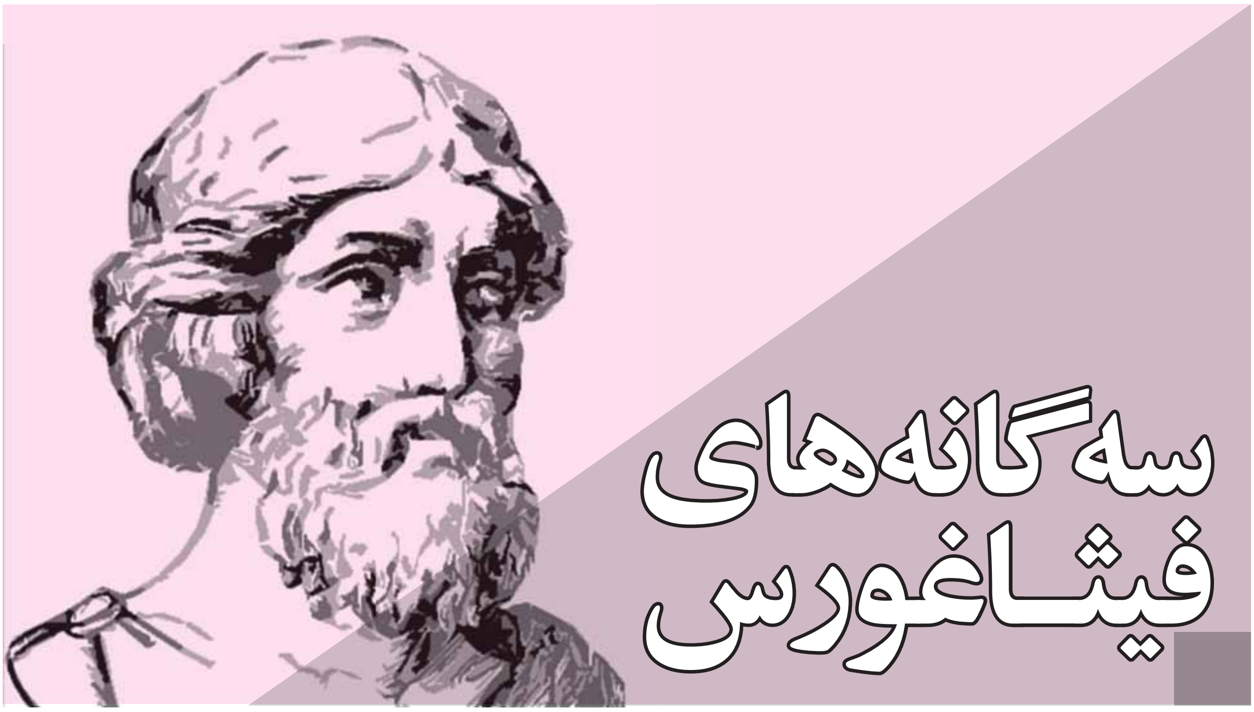


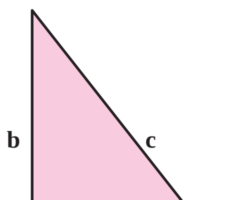
سه‌گانه‌های فیثاغورس

اشاره

این مقاله عمدتاً دربارهٔ جبر است، ولی با مسئله‌ای که نغمهٔ هندسه از آن برمی‌آید، کار را شروع می‌کنیم. این مسئله قضیهٔ *فیثاغورس* است که از زمان *اقلیدس* (۳۰۰ سال پیش از میلاد) سابقه دارد.

عباس قلعه پوراقدم
دبیر ریاضی ارومیه

مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که اضلاع آن a، b و c (c وتر است) باشند. رابطهٔ فیثاغورس در مورد این مثلث به شکل زیر خواهد بود:



$$a^2+b^2=c^2$$

شکل ۱.

عددهای صحیح a، b و c را که در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، سه‌گانه‌های فیثاغورس می‌نامیم.

چند نمونه از سه‌گانه‌های فیثاغورس

۱. $a=3$، $b=4$ و $c=5$، چون: $5^2=4^2+3^2$، یا: $25=16+9$.

۲. $a=6$، $b=8$ و $c=10$، چون: ...

۳. $a=9$، $b=12$ و $c=15$، چون: ...

۴. و بی‌شمار سه‌تایی دیگر که مضرب‌هایی از ۳، ۴ و ۵ هستند.

۵. $a=5$، $b=12$ و $c=13$، چون: $13^2=12^2+5^2$، یا: $25+144=169$.

۶. $a=10$، $b=24$ و $c=26$، چون: ...

۷. و بی‌شمار سه‌تایی دیگر که مضرب‌هایی از ۵، ۱۲ و ۱۳ هستند.

با اندکی معلومات جبری می‌توانیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم:

اگر d عدد صحیحی باشد و m، n و s یک سه‌گانهٔ فیثاغورسی باشند، آن‌گاه dm، dn و ds نیز سه‌گانهٔ فیثاغورسی خواهند بود.

اثبات:

$$(dm)^2+(dn)^2=d^2m^2+d^2n^2=d^2(m^2+n^2)$$
$$=d^2s^2=(ds)^2$$

راستی آیا یافتن سه‌گانه‌های فیثاغورسی تا بی‌نهایت ادامه خواهد داشت؟ به‌عبارت دیگر، آیا بی‌نهایت سه‌گانهٔ فیثاغورسی وجود دارد؟

در واقــع به دنبال همهٔ عددهــای صحیح a، b و c هستیم که در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$(*)\ a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

اگر طرفین معادلهٔ (*) را بر $c^{۲}$ تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(\frac{a}{c})^{۲}+(\frac{b}{c})^{۲}=۱$$

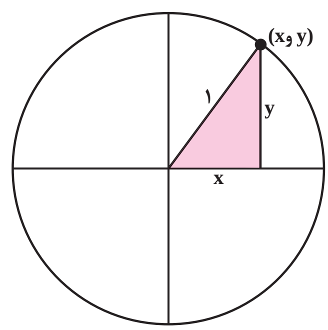
a، b و c عددهای صحیح هستند. بنابراین $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ اعداد گویا خواهند بود. فرض کنیم:

$$x=\frac{a}{c},\ \ y=\frac{b}{c}$$

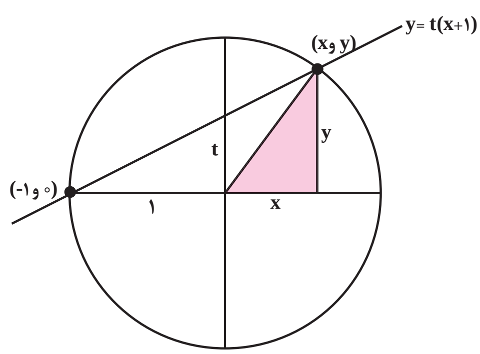
معادلهٔ ما به شکل زیر درمی‌آید:

$$(**)\ x^{۲}+y^{۲}=۱$$

مسئله به یافتن عددهای گویای x و y که در معادلهٔ (**) صدق کنند، تبدیل می‌شود. مجموعهٔ این عددها معادلهٔ دایره‌ای به شــعاع یک است که مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع اســت. جواب معادلــه همهٔ نقاط واقع بر دایره است. در واقع به دنبال همهٔ نقاط (x,y) هستیم که x و y عدد گویا هستند و در $x^{۲}+y^{۲}=۱$ صدق می‌کنند. به شکل‌های ۲ و ۳ دقت کنید.



شکل ۲.



شکل ۳.

برای حل معادلهٔ (**) از پارامتری کردن استفاده می‌کنیم. پارامتر در واقع متغیر ســومی چون t است که به دو متغیر x و y وابسته است. اگر با این ایده که چگونه می‌توان این جواب‌ها را به‌دســت آورد، مدتی تفریح کنید، به این فرمول‌ها خواهید رســید (البته در ادامه، این مطلب تحت عنوان یک قضیه مطرح و اثبات خواهد شــد، لیکن فرصت را از دست ندهید و شانس خود را امتحان کنید. ضمن اینکه پارامتر t در شکل ۳ مشخص شده است.):

$$x=\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}},\ \ y=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}$$

اگــر کمی جبــر بلد باشــید، می‌توانید درســتی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ را آزمایــش کنید. حالا فرض کنید t مقادیر معینی را اختیار کند. چندتــا از این مقادیر را امتحان می‌کنیم و پــس از یافتن x و y از $x=\frac{a}{c}$ و $y=\frac{b}{c}$، سه‌گانهٔ فیثاغورسی موردنظر را پیدا می‌کنیم.

مثــال ۱. t=۲. بــا جایگذاری عــدد ۲ به‌جای t در فرمول‌ها خواهیم داشت:

$$x=\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}=\frac{-۳}{۵}\ ,\ \ y=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}=\frac{۴}{۵}$$

پــس $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ این‌ها هســتند و جواب‌های a=۳، b=۴ و c=۵ به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. اگر t مســاوی هفت اختیار شــود، سه‌تایی ۷، ۲۴ و ۲۵ به‌دست خواهد آمد.

حالا نســبت به ابتــدای بحث پیشــرفت زیادی کرده‌ایــم، چون در آغاز حتی اگــر همهٔ نیروی فکری خود را به‌کار می‌بردیم، جواب‌ها را یکی‌یکی با حدس و آزمایش به‌دســت می‌آوردیم. علاوه بــر این، معلوم نبــود که می‌تــوان بی‌نهایت جواب به‌دســت آورد یا نه. ولی حالا بــا قرار دادن مقادیــر متفاوت به‌جای t به این مرحله رســیده‌ایم که عملاً بتوانیم جواب‌های بی‌شماری را بنویسیم. اما سؤال بعدی این است که با این فرمول‌ها آیا همهٔ جواب‌ها به‌دست می‌آیند؟ پاسخ این سؤال و چگونگی به‌دست آمدن فرمول‌ها به‌صورت قضیهٔ زیر بیان و اثبات می‌شود:

قضیه: به‌جز جـــواب $x=-۱$ و $y=۰$، همهٔ جواب‌های گویای معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ با قرار دادن مقادیر گویا در فرمول‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}\ ,\quad y=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

برهان: بـــا در نظر گرفتن نقاط متفـــاوت روی دایره، کمیتی که آن را در شـــکل ۳ با t نشان داده‌ایم، تغییر می‌کند. مقدار t برحسب x و y، هم از معادلهٔ خط راست و هـــم از قضیهٔ تالس به‌صورت زیر قابل یافتن اســـت:

$$t=\frac{y}{x+۱}$$

به‌وضـــوح $x=-۱$ مخرج را صفر می‌کند، پس جواب $x=-۱$ و $y=۰$ را کنار می‌گذاریم.

حـــال از $x^۲+y^۲=۱$ می‌توانیـــم $y^۲=۱-x^۲$ را نتیجه بگیریـــم و باز با به‌کار بســـتن جبر مراحـــل زیر را طی می‌کنیم:

$$t=\frac{y}{x+۱}\Rightarrow y=t(x+۱)\Rightarrow y^۲=t^۲(۱+x)^۲$$

$$y^۲=۱-x^۲\Rightarrow t^۲(۱+x)^۲=(۱+x)(۱-x)$$

$$\Rightarrow t^۲+t^۲x=۱-x$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

$$y=t(x+۱)\Rightarrow y=t(\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}+۱)\Rightarrow y=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

تاریخچه

اقلیدس یا ریاضی‌دانان هم‌عصر او، در سه قرن پیش از میلاد، می‌دانســـتند که سه‌گانه‌های فیثاغورس a، b و c را با اســـتفاده از فرمول‌های $a=m^۲-n^۲$، $b=۲mn$ و $c=m^۲+n^۲$ کـــه m و n اعداد صحیح هســـتند، می‌توان به‌دســـت آورد. به مـــدد جبر می‌توانیـــد $a^۲+b^۲=c^۲$ را بیازمایید.

ریاضی‌دانان در آن زمان از کار کردن با کسرها اکراه داشتند و بیشتر ترجیح می‌دادند با عددهای صحیح کار کنند. ســـه قرن پس از میلاد، **دیو فانتوس** به کسرها روی آورد و دانست که اگر فرمول‌های بالا را بر $m^۲+n^۲$ تقسیم کند و $t=\frac{n}{m}$ قرار دهد، این فرمول‌ها به‌دست خواهند آمد:

$$\frac{a}{c}=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}\qquad \frac{b}{c}=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

با این حساب از اقلیدس تا دیو فانتوس حدود شش قرن طول کشید تا فرمول‌ها به همان صورتی که ما در قضیه بیان کردیم، درآمدند.

تحقیق: شـــاید برایتان جالب باشـــد که ظاهراً در آغاز ســـه‌گانه‌های فیثاغورسی یک عدد صحیح فرد می‌آید. آیا درســـت اســـت که گفته شـــود هر عدد صحیح فردی، اولین عدد چنین ســـه‌گانه‌ای است؟ بررسی کنید.